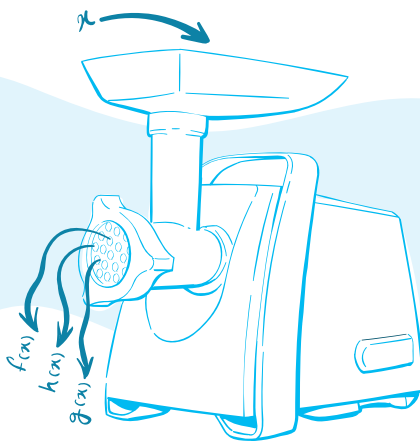
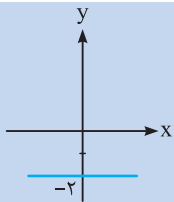
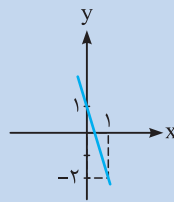
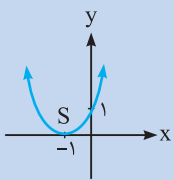
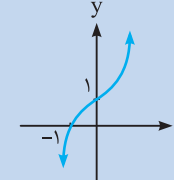




درست‌نامه

توابع چندجمله‌ای

هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را که در آن $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی باشد، یک تابع چندجمله‌ای می‌نامند. اگر $a_n \neq 0$ باشد، چندجمله‌ای از درجه n است. دامنه تمام توابع چندجمله‌ای $\mathbb{R}$ است. معروف‌ترین توابع چندجمله‌ای که با آن‌ها سروکار داریم در جدول زیر آمده‌اند.

نام تابع	درجه	ضابطه کلی، دامنه و برد	مثال
ثابت	۰	$f(x) = a$ $D_f = \mathbb{R}, R_f = \{a\}$	$f(x) = -2$ $D_f = \mathbb{R}, R_f = \{-2\}$ 
خطی غیر ثابت	۱	$f(x) = ax + b; a \neq 0$ $D_f = \mathbb{R}, R_f = \mathbb{R}$	$f(x) = -3x + 1$ $D_f = \mathbb{R}, R_f = \mathbb{R}$ 
درجه ۲	۲	$f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0$ $D_f = \mathbb{R}$ ، نقطه رأس: $S(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$ $R_f = [f(-\frac{b}{2a}), +\infty)$; $a > 0$ $R_f = (-\infty, f(-\frac{b}{2a})]$; $a < 0$	$f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ نقطه رأس: $S(-1, 0)$ $D_f = \mathbb{R}, R_f = [0, +\infty)$ 
درجه ۳	۳	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; a \neq 0$ $D_f = \mathbb{R}, R_f = \mathbb{R}$	$f(x) = x^3 + 1$ $D_f = \mathbb{R}, R_f = \mathbb{R}$ 

سؤال دانش‌پژوه (امیرحسین ذوالفقاری): آقا ببخشید به نظر میاد برد توابع چندجمله‌ای از درجه فرد که دامنه‌شون $\mathbb{R}$ هست، همیشه $\mathbb{R}$

میشه! درست‌ه؟

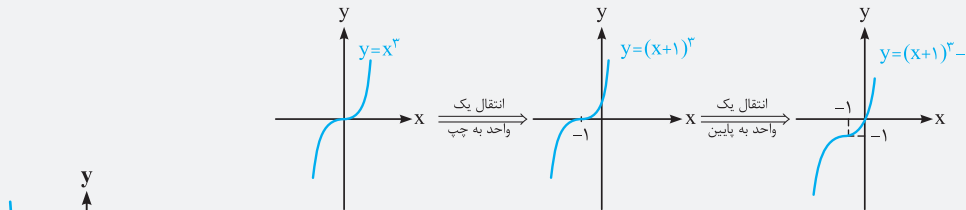
پاسخ آفرین به این نظریه! بله درست‌ه.

مثال نمودار تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ را رسم کنید.

پاسخ برای استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای، عدد ۱ را اضافه و کم می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 = (x+1)^3 - 1$$

حال به کمک نمودار $y = x^3$ ، نمودار تابع حاصل را رسم می‌کنیم:



مثال اگر نمودار مقابل، مربوط به تابع $y = -(x+a)^3 + b$ باشد، a و b را بیابید.

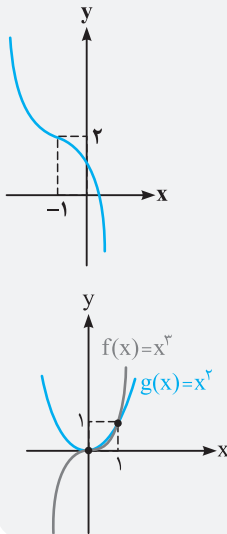
پاسخ با توجه به شکل، مشخص است که این نمودار از روی تابع $y = -x^3$ ساخته شده است، به این شکل که

تابع $y = -x^3$ ، ۱ واحد به چپ حرکت کرده است، پس $a = 1$. سپس این تابع ۲ واحد به بالا رفته است پس $b = 2$ می‌باشد.

رسم توابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^3$ در یک دستگاه: کتاب درسی توجه خاصی به نمودار این دو تابع،

به‌خصوص در فاصله (۰، ۱) داشته است. همان‌طور که در سال دهم دیدید به‌ازای $0 < x < 1$ ، $x^3 < x^2$ می‌باشد. (اگر

فاصله (۰، ۱) بالاتر از نمودار $g(x) = x^3$ قرار می‌گیرد. نمودار این دو تابع را در حالت کلی ببینید:



۱- تابع $y = x^3$ را ۱ واحد به چپ و ۱ واحد به پایین انتقال داده‌ایم. نمودار تابع حاصل از کدام ربع دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

اول (۱) دوم (۲) سوم (۳) چهارم (۴)

۲- کدام گزینه در مورد توابع $f(x) = x^3 - 4$ و $g(x) = -(x+2)^3 + 1$ صحیح نیست؟

(۱) نمودار تابع $g(x)$ از ربع اول دستگاه مختصات عبور نمی‌کند. (۲) دامنه هر دو تابع یکسان است.

(۳) برد f با برد g یکسان نیست. (۴) نمودار تابع $f(x)$ از ربع دوم دستگاه مختصات عبور نمی‌کند.

۳- در کدام یک از توابع چندجمله‌ای زیر، با قرینه‌کردن نمودار تابع نسبت به محور x ها و سپس با قرینه‌کردن نمودار حاصل نسبت به محور

y ها، به نمودار تابع اولیه می‌رسیم؟

(۱) $y = (x-1)^3$ (۲) $y = (x+1)^3$ (۳) $y = x^3$ (۴) $y = x^2$

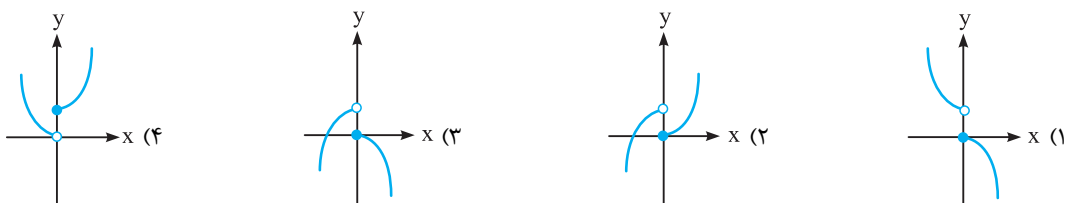
۴- نمودار تابع $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 9$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

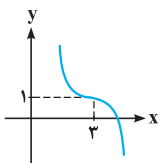
اول (۱) دوم (۲) سوم (۳) چهارم (۴)

۵- اگر $f(x) = x^3 + 2$ و $g(x) = -(x - \frac{1}{3})^3 - \frac{28}{27}$ باشند، آن‌گاه نمودار تابع $(g+f)(x)$ از کدام ربع یا ربع‌های دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

فقط چهارم (۱) فقط دوم (۲) اول و دوم (۳) سوم و چهارم (۴)

۶- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x^3 & ; x \geq 0 \\ x^3 + 1 & ; x < 0 \end{cases}$ کدام است؟





$$y = (x + 3)^3 + 1 \quad (۲)$$

$$y = (3 - x)^3 - 1 \quad (۴)$$

۷- ضابطه تابع مربوط به نمودار مقابل کدام است؟

$$y = (x - 3)^3 + 1 \quad (۱)$$

$$y = (3 - x)^3 + 1 \quad (۳)$$

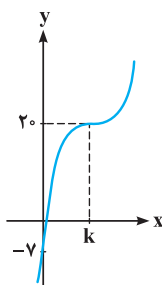
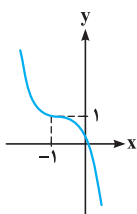
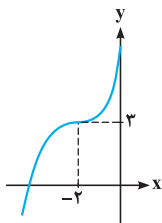
۸- اگر نمودار تابع $y = (x - a)^3 + b$ به صورت مقابل باشد، $a + b$ کدام است؟

$$۵ \quad (۱)$$

$$-۱ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۳)$$

$$-۵ \quad (۴)$$



۹- اگر نمودار تابع $f(x) = (a - x)(x^2 + bx + c)$ به صورت مقابل باشد، $a + b + c$ کدام است؟

$$۶ \quad (۱)$$

$$-۶ \quad (۲)$$

$$۳ \quad (۳)$$

$$\text{صفر} \quad (۴)$$

۱۰- اگر نمودار $f(x) = x^3 - 9x^2 + ax + b$ به صورت مقابل باشد، $a + b$ کدام است؟

$$۳ \quad (۱)$$

$$۲۷ \quad (۲)$$

$$-۴ \quad (۳)$$

$$۲۰ \quad (۴)$$

برگرفته از کتاب درسی

۱۱- در چه بازه‌ای نمودار $f(x) = x^3$ ، بالاتر از نمودار $g(x) = x^2$ قرار دارد؟

$$(-\infty, ۱) \quad (۴)$$

$$(۰, ۱) \quad (۳)$$

$$(۱, +\infty) \quad (۲)$$

$$(-\infty, ۰) \cup (۱, +\infty) \quad (۱)$$

۱۲- در چه فاصله‌ای نمودار تابع $f(x) = x^3$ پایین‌تر از نمودار تابع $g(x) = x|x|$ قرار می‌گیرد؟

$$(۰, ۱) \quad (۴)$$

$$(-۱, ۰) \cup (۱, +\infty) \quad (۳)$$

$$(-\infty, -۱) \cup (۰, ۱) \quad (۲)$$

$$(-۱, ۰) \cup (۰, ۱) \quad (۱)$$

۱۳- نمودار تابع $y = 3 - (x - 1)^3$ خط $y = ax + b$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

$$\text{بیش از ۲} \quad (۴)$$

$$۱ \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$\text{صفر} \quad (۱)$$

درسنامه

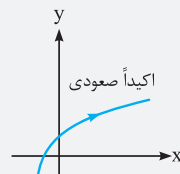
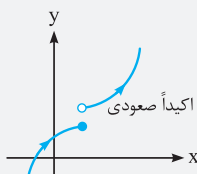
توابع صعودی و نزولی

تعریف: تابع f را صعودی می‌گوییم، اگر با افزایش مقادیر x ، مقادیر y ها کاهش نیابند. یعنی به ازای هر دو نقطه x_1, x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 < x_2$ باشد، داشته باشیم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

در این تعریف اگر $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (علامت $\leq$ به $<$ تبدیل شود)، آن‌گاه تابع f را اکیداً صعودی می‌گوییم.

مثال



سؤال دانش‌پژوه (رها زرنری): آقا فرق اون دوتا شکل اول، سمت چپ، چیه که یکی صعودیه و یکی اکیداً صعودی؟

پاسخ بین، توی شکل سمت چپ با این که $a < b$ ولی $f(a) = f(b)$ ، همین کافیه که بگیریم تابع اکیداً صعودی نیست. بذار فیلد رو راحت کنیم؛ فرق صعودی و اکیداً صعودی اینه که تابع صعودی می‌تونه دو یا چند نقطه هم عرض داشته باشه ولی اکیداً صعودی نمی‌تونه.

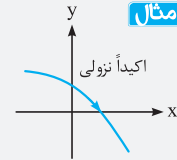
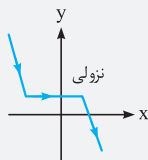
نکته هر تابع اکیداً صعودی، صعودی نیز می‌باشد.

طریقه شناخت توابع صعودی از روی نمودار: هرگاه در یک تابع پیوسته، از سمت چپ به راست روی نمودارها با فلش حرکت کنید و جهت حرکت فلش‌ها رو به پایین نباشد، (فلش‌ها در هر نقطه رو به بالا یا ثابت باشند) تابع صعودی است.

تعریف: تابع f را نزولی می‌گوییم، اگر با افزایش مقادیر x ، مقادیر y ها افزایش نیابند. یعنی به‌ازای هر دو نقطه x_1, x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 < x_2$ باشد، داشته باشیم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

در این تعریف اگر $f(x_1) > f(x_2)$ شود (علامت $\geq$ به $>$ تبدیل شود)، آن‌گاه تابع f را اکیداً نزولی می‌گوییم.

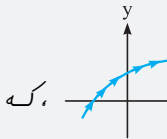


نکته هر تابع اکیداً نزولی، نزولی نیز می‌باشد.

طریقه شناخت توابع نزولی از روی نمودار: هرگاه در یک تابع پیوسته، از سمت چپ به راست روی نمودارها با فلش حرکت نمایید و جهت حرکت فلش‌ها رو به بالا نباشد (رو به پایین یا ثابت باشد) تابع نزولی است.



سؤال دانش‌پژوه (بهرام پهلپله): آقا بعضی شکل‌ها این طوریه: x ، الان این شکل خودش دو طرف فلش داره، معلوم نیست که صعودیه یا نزولی؟



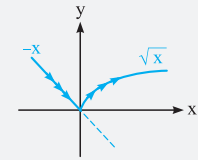
پاسخ آقای بهرام خان، دقت کن، من گفتم خودتون از چپ به راست فلش بزنید. پس شکل شما باید این طوری فلش بفرسته: x ، که مشفیه فلش‌ها از چپ به راست دارن مرتب رو به بالا میرن پس تابع صعودیه.

نکته اگر تابعی در قسمتی از دامنه‌اش ثابت باشد، در آن قسمت هم صعودی و هم نزولی است. در حالت کلی، تابع ثابت، تابعی هم صعودی و هم نزولی است.

نکته اگر تابع f بر دامنه‌اش فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، به آن یکنوا می‌گوییم. به همین ترتیب، اگر f بر دامنه‌اش فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، به آن اکیداً یکنوا می‌گوییم.

نکته دقت کنید اگر تابعی در قسمتی از دامنه‌اش اکیداً صعودی و در قسمتی دیگر اکیداً نزولی باشد، می‌گوییم نه صعودی و نه نزولی است یا به عبارتی اکیداً یکنوا نیست.

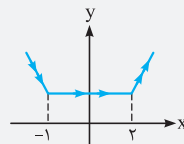
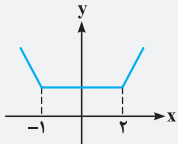
مثال وضعیت تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$ را از لحاظ صعودی و نزولی بودن مشخص نمایید.



پاسخ ابتدا تابع داده‌شده را در بازه‌های مربوط رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل مشخص است که تابع به‌ازای $x \leq 0$ ، اکیداً نزولی و به‌ازای $x \geq 0$ ، اکیداً صعودی است. دقت کنید، با توجه به این‌که تابع در قسمتی از دامنه خود اکیداً نزولی و در قسمتی دیگر اکیداً صعودی است، این تابع اکیداً یکنوا نیست.

مثال با توجه به شکل مقابل، بزرگ‌ترین بازه‌هایی که تابع در آن‌ها صعودی، اکیداً صعودی، نزولی یا اکیداً نزولی است را مشخص نمایید.

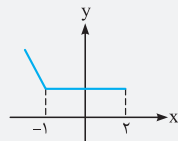


پاسخ با توجه به مطالب گفته شده، تابع فوق در بازه $(-\infty, 2]$ نزولی و در بازه $(-1, +\infty)$ صعودی است.

سؤال دانش‌پژوه (سعیده آژاد): آقا اشتباه نکردید! به نظر بزرگ‌ترین بازه نزولی بودن، $(-\infty, -1)$ و بزرگ‌ترین بازه

صعودی بودن $(2, +\infty)$ میشن.

پاسخ نه خانم! گفتیم تابع ثابت هم صعودی و هم نزولیه. پس با توجه به شکل و فلش‌ها، بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع نزولیه، به صورت شکل مقابل میشه، یعنی از $-\infty$ تا 2 . به همین ترتیب از -1 تا $+\infty$ تابع صعودیه، یعنی قسمت ثابت در هر دو جواب میار. هم‌چنین با توجه به مطالب گفته شده، تابع در بازه‌های $(-\infty, -1]$ و $[2, +\infty)$ به ترتیب اکیداً نزولی و اکیداً صعودی است.

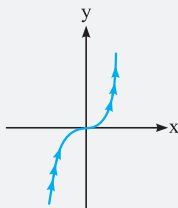


نکات

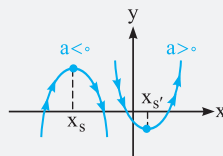
- ۱) مجموع دو تابع صعودی (اکیداً صعودی)، تابعی صعودی (اکیداً صعودی) است. همچنین مجموع یک تابع صعودی و یک تابع اکیداً صعودی نیز اکیداً صعودی است.
- ۲) مجموع دو تابع نزولی (اکیداً نزولی)، تابعی نزولی (اکیداً نزولی) است. همچنین مجموع یک تابع نزولی و یک تابع اکیداً نزولی نیز، اکیداً نزولی است.
- ۳) اگر تابع f ، تابعی صعودی (نزولی) باشد، آنگاه تابع $-f$ ، تابعی نزولی (صعودی) خواهد بود.
- مثال ۱) تابع $y = x^3 + x$ تابعی اکیداً صعودی است. زیرا $y_1 = x^3$ و $y_2 = x$ هر دو تابعی اکیداً صعودی هستند و لذا مجموع آنها نیز اکیداً صعودی است.
- مثال ۲) تابع $y = x^3$ تابعی اکیداً صعودی است. بنابراین تابع $y = -x^3$ تابعی اکیداً نزولی خواهد بود.

بررسی یکنواپی توابع مهم که در کتاب درسی آمده‌اند:

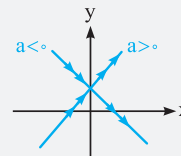
۱) توابع چندجمله‌ای مهم:



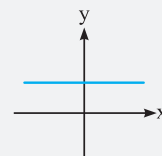
تابع $y = x^3$ تابعی اکیداً صعودی است.



تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ ، به شرط $a > 0$ ابتدا نزولی (در بازه $(-\infty, x_{S'})$) و سپس صعودی (در بازه $(x_{S'}, +\infty)$) است. با شرط $a < 0$ این تابع ابتدا صعودی و سپس نزولی است.



تابع خطی $y = ax + b$ با شرط $a > 0$ اکیداً صعودی و با شرط $a < 0$ اکیداً نزولی است.



تابع ثابت $f(x) = a$: هم صعودی و هم نزولی است.

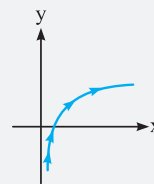
۲) توابع نمایی و لگاریتمی:



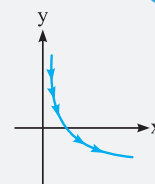
تابع نمایی $y = a^x$ با شرط $a > 1$ ، اکیداً صعودی است.



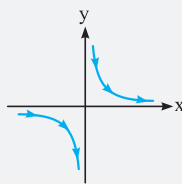
تابع نمایی $y = a^x$ با شرط $0 < a < 1$ ، اکیداً نزولی است.



تابع $y = \log_a x$ با شرط $a > 1$ ، اکیداً صعودی است.

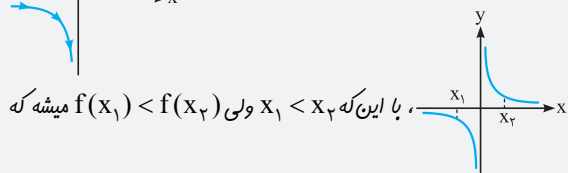


تابع $y = \log_a x$ با شرط $0 < a < 1$ ، اکیداً نزولی است.



۳) تابع کسری $y = \frac{1}{x}$: این تابع در هر یک از بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ به صورت جداگانه نزولی است اما در کل دامنه‌اش، نه نزولی و نه صعودی است.

سؤال ۱) دانش‌پژوه (املا شریف‌زاده): آقا چرا آخه؟



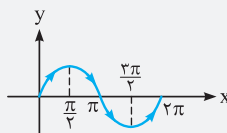
پاسخ ۱) بچه این جور که تو سؤال پرسیری من فکر کردم زلزله اومده! ببین تو شکل $x_1 < x_2$ ولی $f(x_1) < f(x_2)$ میشه که

این خلاف تعریف نزولی بودن. (یادتونه که برای نزولی بودن، با شرط $x_1 < x_2$ ، باید $f(x_1) \geq f(x_2)$ می‌شد).

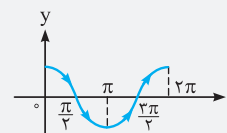
سؤال ۲) همون قبلی: آقا، پس قضیه فلش‌ها چی! مرتب رو به پایین هستن!

پاسخ ۲) پسر فوب، گفتیم آگه تابع پیوسته بود و فلش‌ها رو به پایین اون قضیه درسته. این‌جا هم تو بازه‌هایی که تابع پیوسته هست مثل $(0, +\infty)$ یا $(-\infty, 0)$ اون قضیه درسته و می‌گیم تابع در فاصله $(0, +\infty)$ یا $(-\infty, 0)$ نزولیه ولی در کل، نه صعودی نه نزولیه.

۴) توابع مثلثاتی:

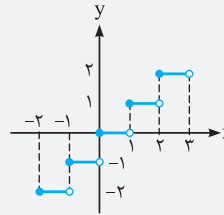


تابع $y = \sin x$ ، تابعی نوسانی است و مرتباً از نزولی به صعودی و صعودی به نزولی تغییر وضعیت می‌دهد. مثلاً در فاصله $[0, \frac{\pi}{2}]$ اکیداً صعودی و در فاصله $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ اکیداً نزولی است.



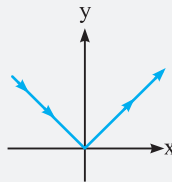
تابع $y = \cos x$ ، تابعی نوسانی است و مرتباً از نزولی به صعودی و برعکس تغییر وضعیت می‌دهد. مثلاً در فاصله $[0, \pi]$ اکیداً نزولی و در فاصله $[\pi, 2\pi]$ اکیداً صعودی است.

(۵) تابع جزء صحیح:



تابع $y = [x]$ تابعی صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست.

(۶) تابع قدر مطلق:

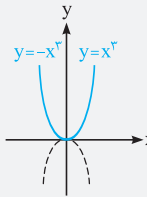


تابع $y = |x|$ در فاصله $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی و در فاصله $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است. اما در $\mathbb{R}$ نه صعودی و نه نزولی است.

نکته برای رسم توابع شامل قدر مطلق، کافی است با توجه به ریشه عبارت داخل قدر مطلق، ابتدا آن را به صورت چندضابطه‌ای نوشته و سپس آن را رسم کنیم.

مثال نمودار $f(x) = x^2 |x|$ را رسم کنید.

پاسخ



$$f(x) = x^2 |x| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot x & ; x \geq 0 \\ x^2 (-x) & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3 & ; x \geq 0 \\ -x^3 & ; x < 0 \end{cases}$$

تعیین صعودی یا نزولی بودن از روی زوج مرتب‌ها: طبق تعریف اگر به‌ازای افزایش مقادیر x (مؤلفه‌های اول) y (مؤلفه‌های دوم) مرتباً زیاد شوند، تابع اکیداً صعودی است و اگر کاهش نیابند صعودی است. به همین ترتیب نزولی و اکیداً نزولی تعریف می‌شوند. مثلاً:

$$f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 5)\} \Rightarrow 4 \nearrow 5 \Rightarrow 5 \Rightarrow f \text{ صعودی غیر اکید}$$

$$f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 0)\} \Rightarrow 2 \searrow 1 \searrow 0 \Rightarrow f \text{ اکیداً نزولی}$$

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\} \Rightarrow 2 \nearrow 3 \searrow 1 \Rightarrow f \text{ نه صعودی و نه نزولی است}$$

برگرفته از کتاب درسی

۱۴- تابع $f(x) = -\sin x$ در کدام بازه زیر اکیداً صعودی است؟

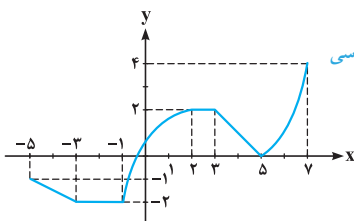
- (۱) $[0, \pi]$ (۲) $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ (۳) $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ (۴) $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

برگرفته از کتاب درسی

۱۵- تابع $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ در کدام بازه زیر صعودی است؟

- (۱) $(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ (۲) $(\frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3})$ (۳) $(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ (۴) $(\pi, 2\pi)$

● با توجه به نمودار تابع f که به صورت مقابل می‌باشد، به چهار سؤال زیر پاسخ دهید. برگرفته از کتاب درسی



۱۶- بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن صعودی می‌باشد، کدام است؟

- (۱) $[-1, 2]$ (۲) $[4, 6]$ (۳) $[-3, 2]$ (۴) $[-3, 3]$

۱۷- اجتماع بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن صعودی می‌باشد و بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن نزولی می‌باشد، کدام است؟

- (۱) $[-1, 5]$ (۲) $[-1, 2] \cup [3, 5]$ (۳) $[-5, 3]$ (۴) $[-5, 5]$

۱۸- چند نقطه وجود دارد که تابع، قبل از آن نقطه اکیداً نزولی و بعد از آن اکیداً صعودی باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۹- چند نقطه با طول صحیح نامنفی وجود دارد که تابع قبل از آن صعودی و بعد از آن نزولی باشد؟

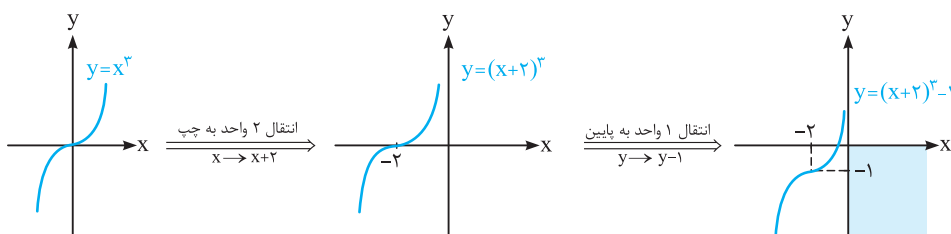
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۰- تابع $f(x) = \cos x$ مفروض است. در کدام بازه زیر، برای هر x_1 و x_2 عضو این بازه، رابطه $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ برقرار است؟

- (۱) $(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ (۲) $(2\pi, 3\pi)$ (۳) $(\pi, 2\pi)$ (۴) $(\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2})$

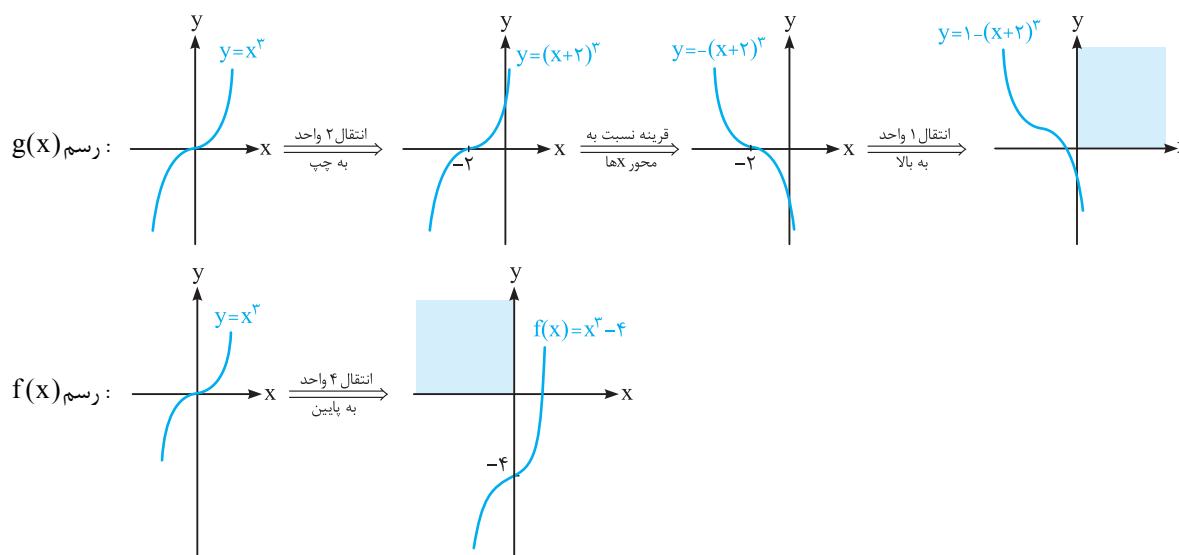
برگرفته از کتاب درسی

پاسخ تشریحی



۴ ۱

دامنه تمام توابع چندجمله‌ای $\mathbb{R}$ است. هم‌چنین برد تمام توابع چندجمله‌ای از درجه فرد برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد. پس گزینه (۲) صحیح و گزینه (۳) نادرست است. با رسم توابع $f(x)$ و $g(x)$ می‌توان درستی گزینه‌های (۱) و (۴) را نیز نشان داد:



بررسی گزینه‌ها:

۳ ۳

$$۱) y = (x-1)^3 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} y = -(x-1)^3 \xrightarrow{x \rightarrow -x} y = -(-x-1)^3 \Rightarrow y = (x+1)^3 \quad \times$$

$$۲) y = (x+1)^3 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} y = -(x+1)^3 \xrightarrow{x \rightarrow -x} y = -(-x+1)^3 \Rightarrow y = (x-1)^3 \quad \times$$

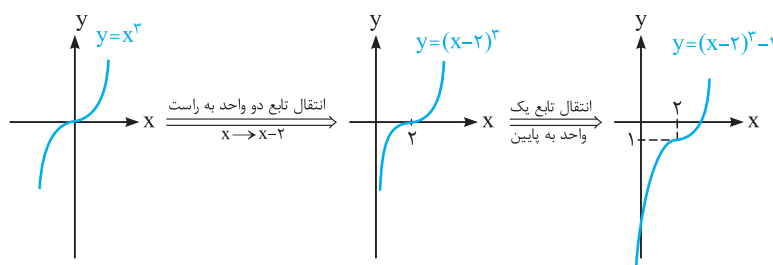
$$۳) y = x^3 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} y = -x^3 \xrightarrow{x \rightarrow -x} y = -(-x)^3 \Rightarrow y = x^3 \quad \checkmark$$

$$۴) y = x^3 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} y = -x^3 \xrightarrow{x \rightarrow -x} y = -(-x)^3 \Rightarrow y = -x^3 \quad \times$$

$$y = x^3 - 6x^2 + 12x - 9 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 1 = (x-2)^3 - 1$$

۲ ۴

حال به کمک نمودار $y = x^3$ تابع موردنظر را رسم می‌کنیم:



همان‌طور که مشخص است، این نمودار از ناحیه دوم عبور نمی‌کند.

$$(g+f)(x) = g(x) + f(x) = -\left(x - \frac{1}{3}\right)^3 - \frac{28}{27} + x^3 + 2 = -\left(x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{27}\right) - \frac{28}{27} + x^3 + 2$$

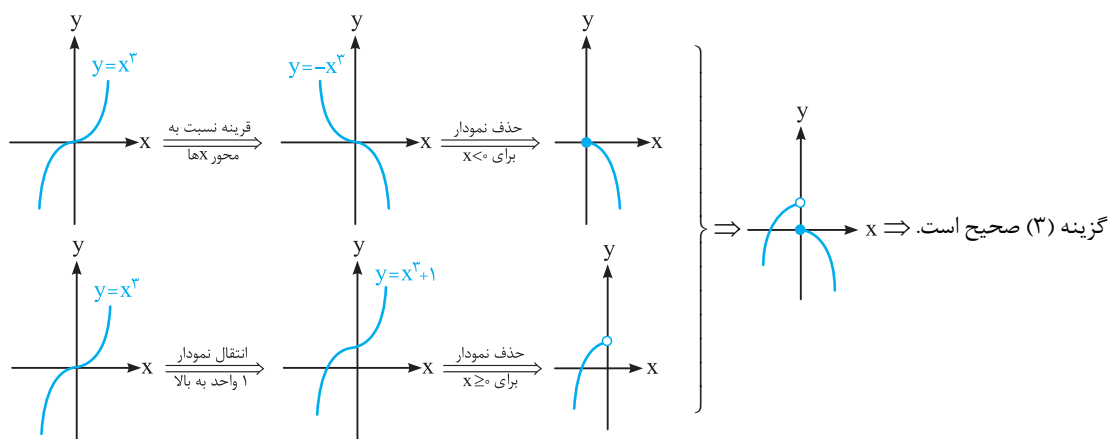
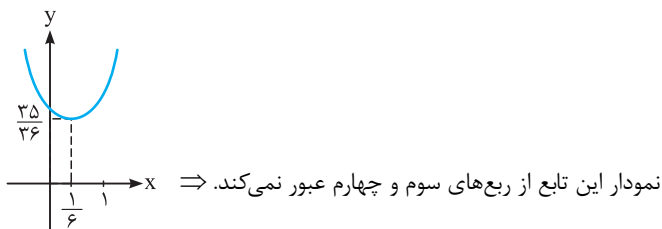
۴ ۵

$$= -x^3 + x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{27} - \frac{28}{27} + x^3 + 2 = x^2 - \frac{1}{3}x + 1$$

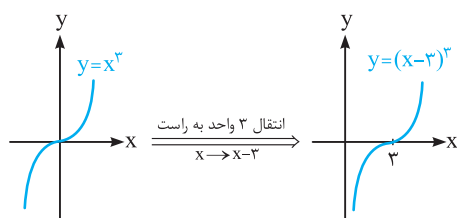
برای رسم این تابع نقطه رأس آن را می‌یابیم:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{1}{3}}{2(1)} = \frac{1}{6}, \quad y_S = \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right) + 1 = \frac{1}{36} - \frac{1}{18} + 1 = \frac{35}{36}$$

پس نمودار تابع به صورت مقابل است:

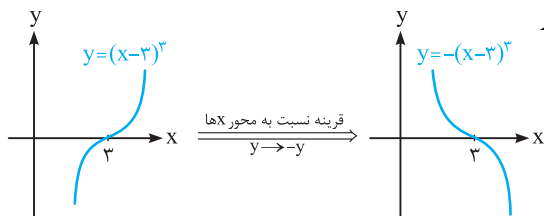


۳ ۶

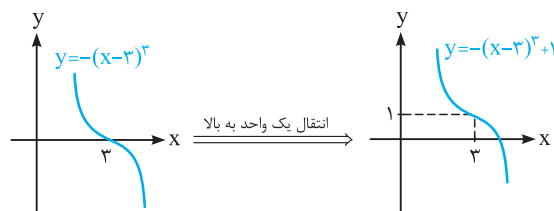


با توجه به نمودار داده‌شده و گزینه‌ها، مشخص است که نمودار داده‌شده مربوط به یک تابع درجه ۳ می‌باشد. مشخص است که نمودار اولیه $y = x^3$ ۳ واحد به راست انتقال یافته است. داریم:

۳ ۷



هم‌چنین با توجه به نمودار داده‌شده مشخص است که تابع نسبت به محور Xها قرینه شده است:

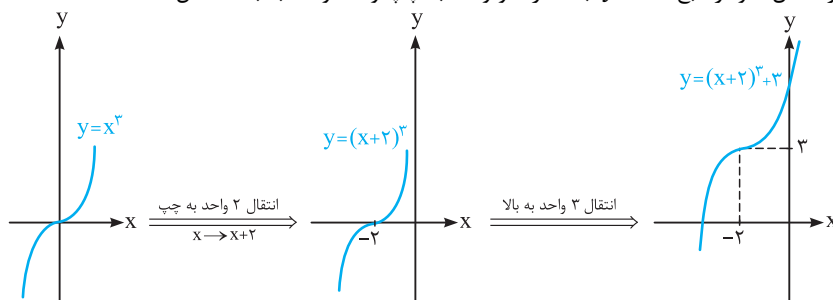


در نهایت نمودار یک واحد به بالا برده شده است:

می‌دانیم $-(x-3)^3 = (3-x)^3$ پس ضابطه داده شده در گزینه (۳) صحیح است.

۳ ۸

نمودار تابع داده شده از انتقال نمودار تابع $y = x^3$ به اندازه دو واحد به چپ و سه واحد به بالا حاصل شده است:



با مقایسه $y = (x-a)^3 + b$ و $y = (x+2)^3 + 3$ نتیجه می گیریم: $b = 3$ و $a = -2$ بنابراین $a+b = (-2)+3 = 1$.

۱ ۹

با توجه به نمودار، مشخص است که نمودار داده شده مربوط به تابع $y = -(x+1)^3 + 1$ می باشد. داریم:

$$y = -(x+1)^3 + 1 = -(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 1 = -x^3 - 3x^2 - 3x - 1 + 1 = -x^3 - 3x^2 - 3x \Rightarrow y = -x(x^2 + 3x + 3)$$

با مقایسه y با $f(x) = (a-x)(x^2 + bx + c)$ و برابر قرار دادن ضرایب متناظر داریم:

$$a = 0, b = 3, c = 3 \Rightarrow a+b+c = 0+3+3 = 6$$

۴ ۱۰

با توجه به نمودار داده شده مشخص است که $f(0) = -7$. پس:

$$f(0) = -7 \Rightarrow -7 = 0^3 - 9(0)^2 + a(0) + b \Rightarrow b = -7 \Rightarrow f(x) = x^3 - 9x^2 + ax - 7$$

از طرفی با توجه به شکل داده شده مشخص است که نمودار به صورت $y = (x-k)^3 + 20$ می باشد.

داریم:

$$y = (x-k)^3 + 20 \Rightarrow y = x^3 - 3kx^2 + 3k^2x - k^3 + 20$$

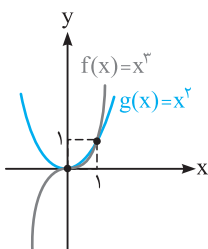
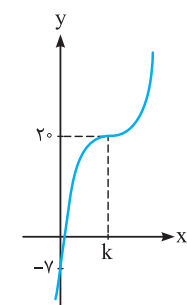
تمام ضرایب دو تابع $f(x)$ و y باید با هم برابر باشند پس:

$$-k^3 + 20 = -7 \Rightarrow -k^3 = -27 \Rightarrow k^3 = 27 \Rightarrow k = 3$$

$$3k^2 = a \xRightarrow{k=3} a = 3(3)^2 = 27 \Rightarrow a+b = 27+(-7) = 20$$

کافی است نمودار دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را در یک دستگاه رسم کنیم:

۲ ۱۱



با توجه به نمودار مشخص است که نمودار $f(x)$ فقط به ازای $x > 1$ ، بالاتر از نمودار $g(x)$ قرار دارد. $\Rightarrow$

۲ ۱۲

یادآوری برای رسم توابع شامل قدرمطلق، بهتر است با توجه به ریشه عبارت داخل قدرمطلق آن را به صورت یک تابع چندضابطه ای نوشته و سپس آن را رسم نماییم.

$$g(x) = x|x| \Rightarrow g(x) = \begin{cases} x(x) & ; x \geq 0 \\ x(-x) & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$$

$x=0$: ریشه عبارت داخل قدرمطلق

می دانیم به ازای $0 < x < 1$ ، $x^2 > x^3$ ، هم چنین به ازای $-1 < x < 0$ داریم:

$$-1 < x < 0 \xRightarrow{x^2 > x^3} -x^2 < x^3 < 0 \Rightarrow \text{قرار می گیرد}$$

پس با رسم نمودار دو تابع در یک دستگاه مشخص است که در بازه های $(0,1)$ و $(-\infty, -1)$ نمودار $f(x)$

پایین تر از $g(x)$ قرار دارد.

